Area di base: matematico-scientifica. Le competenze matematiche nel nuovo curricolo biennale della formazione professionale

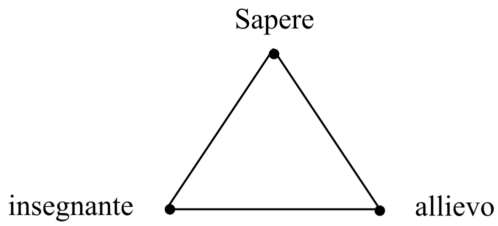
Silvia Sbaragli
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
Facoltà di Scienze della Formazione, Università di Bologna e Bolzano, Italia
Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Svizzera

Pubblicato in: Sbaragli S. (2007). Area di base: matematico-scientifica. Le competenze matematiche nel nuovo curricolo biennale della formazione professionale. In: Lodini E., Luppi E., Vanini I. (Eds.). *Promuovere le competenze "per la vita". Una didattica efficace per costruire il nuovo curricolo dei percorsi per l'Obbligo Formativo nella Formazione Professionale.* Assessorato Istruzione, Formazione, Lavoro, Politiche per la sicurezza sul lavoro della Provincia di Bologna. Roma: Carocci. 98-129.

1. Difficoltà nell'apprendimento della matematica

Il progetto di formazione legato agli standard minimi relativi alle competenze di base e ai percorsi per l'assolvimento del diritto-dovere all'istruzione e alla formazione è stato finalizzato a re-impostare il curricolo biennale della formazione professionale bolognese in modo da assicurare agli allievi un adeguato livello nelle competenze fondamentali per il diritto a una cittadinanza attiva. Si tratta, in genere, di allievi che hanno alle spalle percorsi scolastici negativi e di solito tali difficoltà nello studio si amplificano ulteriormente quando si parla di "studiare la matematica".

È possibile impostare le riflessioni su questo argomento partendo dal cosiddetto triangolo della didattica (Chevallard, Joshua, 1982) dove sono messi in evidenza tre componenti della situazione didattica di insegnamento:
- insegnante (polo funzionale e pedagogico);
- allievo (polo genetico e psicologico);
- Sapere (polo ontologico e epistemologico) (D'Amore, 1999; 2003).



Per ogni polo si identificano specifiche difficoltà:
- riferite all'allievo (convinzioni; stili cognitivi; aspettative; competenze reali; deficit sensoriali o psichici; deprivazioni socio-culturali; …);
- alle particolarità della disciplina matematica (aspetti storici, epistemologici, concettuali; …);
- all'insegnante (aspettative; convinzioni; formazione; …).

A queste difficoltà si aggiungono quelle riferite alle relazioni tra i poli:
- allievo-matematica (immagine di scuola, di cultura, di sapere; rapporto personale con la matematica e, più in generale, con l'istituzionalizzazione del sapere; …);
- insegnante-allievo (caratterizzata da una relazione pedagogica asimmetrica);
- insegnante-matematica (idea di scuola; obiettivi dell'educazione; epistemologia, più o meno consapevole, dell'insegnante; …).[1]

Data la complessità del sistema didattico occorre prendere in considerazioni tutti i poli contemporaneamente e le relazioni fra essi.

L'insegnante in classe si trova quindi a dover gestire tutte queste difficoltà con origini e tipologie diverse, per le quali necessita di strumenti e strategie opportune per favorire il loro superamento.

L'impostazione e le idee alla base di questo articolo sono tratte da D'Amore (1999) al quale rimandiamo per un approfondimento; idee che sono state riprese in D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli (2008).

2. Ostacoli all'apprendimento

Tra le cause di tali difficoltà didattiche già a partire dal 1976 Guy Brousseau (Brousseau, 1976-1983) mise in evidenza la *teoria degli ostacoli* che si frappongono all'apprendimento della matematica; teoria sistemata in modo definitivo negli anni successivi (Perrin-Glorian, 1994, pagg. 112-115 e oltre).

Si usa dire che un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Brousseau fornisce (in quei primi lavori di ricerca ed in successivi) alcune caratteristiche degli ostacoli:

- bisogna sempre tener presente che, in generale, un ostacolo non è una mancanza di conoscenza, ma una conoscenza;
- l'allievo usa questa conoscenza per dare risposte adatte in un contesto noto, già incontrato;
- se l'allievo tenta di usare questa conoscenza fuori dal contesto noto, già incontrato, fallisce, generando risposte scorrette; ci si accorge allora che si necessita di punti di vista diversi;
- l'ostacolo produce contraddizioni, ma lo studente resiste a tali contraddizioni; sembra allora necessitare di una conoscenza più generale, maggiore, più

[1] Per un approfondimento si veda D'Amore, Fandiño Pinilla (2002).

approfondita, che generalizzi la situazione nota e risolta, e che comprenda la nuova nella quale si è fallito; bisogna che questo punto venga reso esplicito e che lo studente se ne renda conto;
- anche una volta superato, in modo sporadico l'ostacolo riappare lungo il corso del percorso cognitivo dell'allievo.

Questa caratterizzazione degli ostacoli non sempre si adatta a qualsiasi loro tipologia, quindi bisogna guardarla ed accettarla in modo critico.

Si usa distinguere in didattica della matematica tre tipi di ostacoli:
- di natura ontogenetica
- di natura didattica
- di natura epistemologica

Analizziamone le caratteristiche nel dettaglio.

♦ Ostacoli ontogenetici
Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto alla costruzione di certi concetti, cioè all'appropriazione di certi oggetti matematici, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti e possono costituire quindi *ostacoli di natura ontogenetica*. Per esempio, l'allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica. In realtà, si potrebbero categorizzare meglio gli ostacoli, con una ripartizione più fine, ma dato che in questo tipo di ostacoli, la ricerca in didattica della matematica può fare poco, non procediamo in questa analisi; altri sono i settori di studio che si sono dedicati a questa vasta problematica.

♦ Ostacoli didattici
Ogni docente sceglie un progetto, un curricolo, una metodologia, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche; egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*.

Sapere accademico — *TRASPOSIZIONE DIDATTICA*

sapere da insegnare — *INGEGNERIA DIDATTICA*

sapere insegnato

La scelta del contenuto rientra nella trasposizione didattica, la scelta della metodologia rientra nell'ingegneria. Sia l'una scelta che l'altra, sono scelte compiute dal docente, in base alle proprie convinzioni. Sia l'una che l'altra possono non essere efficaci per tutti gli studenti e rivelarsi dunque fallimentari per alcuni.

Un esempio. "Segmento come collana di perle".
La scelta di alcuni docenti di scuola primaria di proporre il modello di segmento come collana di perle (i punti), che per la sua immediatezza viene subito accettato dagli studenti, costituisce un evidente esempio di ostacolo didattico al momento in cui si deve introdurre l'idea di densità in Q e ancora più l'idea di continuità in R (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).
A questo proposito durante un lavoro di ricerca condotto da Sbaragli (2006) su questo tema un insegnante afferma:
«Di solito faccio vedere come sono disposti i punti nel segmento, uno di fianco all'altro, piccoli, piccoli, vicini, vicini e dritti»
(disegna una "fitta" collana di perle).

Ric.: «Secondo te, questo modo di rappresentare il segmento è corretto?».
F.: «Penso di sì, i punti devono essere allineati e vicini vicini l'uno all'altro».
Ric.: «Questo lo mostri in classe ai tuoi allievi?».
F.: «Sì, questo lo faccio sempre vedere».
Questo modello intuitivo erroneo di segmento come "collana di perle" posseduto anche da allievi di scuola superiore, e rafforzato dall'insegnamento ricevuto, rappresenta un ostacolo verso la comprensione dei concetti di infinito matematico, di densità e di continuità e quindi della topologia della retta reale.

♦ Ostacoli epistemologici

Ogni argomento a carattere matematico ha un suo proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua creazione da parte di un individuo, dalla sua evoluzione all'interno della comunità matematica, dalla sua accettazione critica nell'àmbito della matematica, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere.
Ciò comporta che vi siano oggetti della matematica la cui natura è tale da costituire ostacolo non solo nell'apprendimento ma anche, e prima ancora, nella sua accettazione nella comunità scientifica.
Questo fatto è interessante perché permette di conoscere a priori quali, dei concetti matematici che si desiderano far costruire ai propri allievi nel corso di un percorso didattico, costituiranno ostacoli epistemologici all'apprendimento.
Detto in modo più esplicito: quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno *ostacoli di carattere epistemologico* sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso. Quest'ultimo punto si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.
È ormai opinione diffusa che l'idea di ostacolo nel suo senso epistemologico debba essere fatta risalire al lavoro di Gaston Bachelard.

Scrive infatti esplicitamente il filosofo francese nel 1938: «È in termini di ostacolo che bisogna porre il problema della conoscenza scientifica. E non si tratta di considerare gli ostacoli esterni, come la complessità e la fugacità dei fenomeni, né d'incriminare la debolezza dei sensi e dello spirito umano: è nell'atto stesso di conoscere, intimamente, che appaiono, per una sorta di necessità funzionale, delle lungaggini e degli scompigli. È là che noi mostreremo le cause di stagnazione e anche di regressione, è là che noi individueremo delle cause d'inerzia, che noi chiameremo Ostacoli Epistemologici».
La ricerca degli ostacoli epistemologici va allora fatta contemporaneamente:

- a scuola, nella pratica didattica;
- nello studio della storia della matematica,

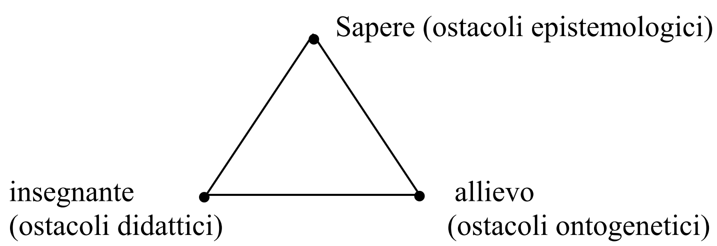
coniugando l'una ricerca con l'altra.

Abbiamo al giorno d'oggi moltissimi esempi di ostacoli epistemologici; basta ripercorrere la storia della matematica per rilevare lotte, discussioni, rotture per quanto riguarda ad esempio l'infinito matematico, dal momento in cui Zenone di Elea (V-VI sec. a. C.) introdusse i suoi celebri paradossi, fino alla condanna di Aristotele di Stagira (III sec. a. C.) dell'infinito attuale e alla sua completa accettazione grazie all'opera di George Cantor (tra il XIX e XX).
Molto interessante risulta inoltre lo studio condotto da Glaeser sui numeri interi (Glaeser, 1981). In questa ricerca l'autore mette dettagliatamente in evidenza una lista di ostacoli epistemologici rintracciati grazie ad un'analisi storica del concetto di numeri interi relativi. Molto interessante il fatto che egli trovi una stretta relazione tra gli ostacoli riscontrati negli studenti e le difficoltà incontrate da grandi matematici nel passato, proprio nel trattare questo argomento: Diofanto, Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, d'Alambert, Carnot, Laplace, Cauchy ed Hankel (che, in realtà, supera tutti gli ostacoli noti, proponendo una sistemazione fondazionale basata sulle classi di equivalenza).

Riassumendo:

- l'ostacolo ontogenetico è legato allo studente ed alla sua natura (da tanti punti di vista);
- quello didattico alla scelta strategica del docente;
- quello epistemologico alla natura stessa dell'argomento;

che ripensati all'interno del triangolo della didattica, secondo l'impostazione di D'Amore (2003), diventano:



Non è poi detto che le intersezioni reciproche tra tipologie di ostacoli siano vuote.

A volte, il riconoscere un ostacolo epistemologico fa scattare condizionamenti didattici che finiscono con l'aggiungere a quelli epistemologici, appunto, ostacoli didattici.

Per *esempio,* che l'oggetto matematico zero sia un ostacolo epistemologico è piuttosto noto ed evidente; ciononostante, la ricerca ha mostrato che bambini fra i 3 ed i 6 anni arrivano a concettualizzarlo in maniera molto significativa. Tuttavia, spesso, l'insegnante, proprio perché riconosce in zero un ostacolo (epistemologico) lo tratta in maniera non idonea, creando oltre tutto un ostacolo didattico laddove non sarebbe necessario (D'Amore, 2007).

Nella necessità didattica di superare tali ostacoli, si dovrebbero studiare occasioni didattiche strutturate appositamente per fornire agli allievi prove della necessità di modificare le loro concezioni.

3. Le misconcezioni[2]

Legata all'idea di ostacolo e alle difficoltà che gli allievi incontrano per raggiungere la costruzione dei concetti vi è quella di misconcezione.
«Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione» (D'Amore, 1999). In questa prospettiva, le misconcezioni possono rappresentare concezioni *momentaneamente* non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica.
Le *immagini* che uno studente si fa dei concetti in alcuni casi possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute; tali immagini-misconcezioni, essendo in continua evoluzione nella complessa scalata verso la costruzione di un concetto, non sempre risultano di ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi, a meno che esse non diventino forti e stabili *modelli* erronei di tale concetto.
Tutto ciò deriva dalla forza e stabilità del modello, caratteristiche che sono di per sé stesse di ostacolo ai futuri apprendimenti, rispetto alla dinamicità e instabilità delle immagini.
In questi casi, le misconcezioni, che potrebbero non essere considerate in senso negativo se viste e proposte come momento di passaggio, diventano ostacoli per i successivi apprendimenti, difficili da essere superati. Si tratta allora di non favorire anticipatamente l'insorgere di modelli, in quanto accomodare un modello erroneo trasformandolo in un nuovo modello comprensivo di una diversa situazione non è affatto facile, dato che il modello è per sua stessa natura forte e stabile.

[2] Per un excursus storico dell'interpretazione e dell'uso del termine misconcezione si veda D'Amore, Sbaragli (2005) e Zan (2006).

Didatticamente conviene quindi lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al Sapere matematico che si vuole raggiungere.
L'idea di impostare questi aspetti della didattica della matematica in termini di immagini e modello risale a D'Amore (1999); con questa idea, negli anni '90, si sono unificate teorie che sembravano dispersive e diverse.

4. Misconcezioni "evitabili" e "inevitabili"
In questi ultimi anni, stiamo avviando una prima classificazione delle misconcezioni, osservandone le specifiche particolarità. Una prima distinzione riguarda quelle che abbiamo chiamato misconcezioni "evitabili" e "inevitabili" (Sbaragli, 2005a; Martini, Sbaragli, 2005).

♦ Le misconcezioni "evitabili" derivano *direttamente dalla trasposizione didattica del sapere e dall'ingegneria didattica*,[3] in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti. Queste misconcezioni dipendono dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi.
In effetti, capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, a volte derivanti dalle proposte della *noosfera* (libri di testo, programmi, riviste, …), di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali.
Le continue e univoche sollecitazioni fornite dall'insegnante fanno sì che lo studente, addirittura a volte anche l'insegnante stesso, confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere: «Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni» (D'Amore, 2003).

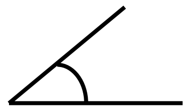
Un esempio. Il punto geometrico.
Il punto nel contesto della matematica viene percepito da allievi, e a volte da insegnanti stessi, tramite l'unica rappresentazione convenzionale che viene comunemente fornita dai libri di testo e dalle lezioni in aula: un "tondino" disegnato su un foglio, di diametro variabile, avente pertanto una certa dimensione.
Ad esempio, alla domanda posta dal ricercatore (Sbaragli, 2005b): «Che cos'è per te un punto in geometria?», alcuni allievi rispondono attribuendo a questo ente matematico una *forma* "tondeggiante" che corrisponde a quella di un cerchio:
«È un punto rotondo che forma le linee» (III media).
Inoltre, come si rileva dai casi seguenti, alcuni allievi ed insegnanti associano alla forma dei punti geometrici anche una certa *dimensione variabile*:

[3] La terminologia didattica specifica si trova in D'Amore (1999).

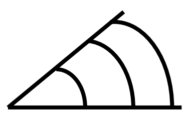
«Per me il punto può essere una cosa grandissima o microscopica perché è come un cerchio di diverse misure» (IV primaria).
«Per me il punto è un cerchio di diametro variabile» (insegnante di scuola primaria).
È, in effetti, la dimensione variabile del punto geometrico, l'erronea caratteristica sulla quale si concentra maggiormente l'attenzione degli intervistati, sostenendo come tale dimensione possa variare a seconda della rappresentazione scelta.
Le distorte idee intuitive sopra evidenziate, concernenti la forma e la dimensione del punto matematico, vincolano quindi l'apprendimento matematico successivo, continuando a scontrarsi durante l'intera carriera scolastica, e non solo, con gli altri saperi. Dalle idee degli insegnanti sopra evidenziate, emerge come spesso la scelta di lasciare gli enti primitivi solamente all'aspetto "personale" senza passare al loro aspetto "istituzionale", non è una scelta didattica consapevole, mirata ad aggirare questioni assai delicate legate al tentativo di "definire" tali oggetti, ma deriva dall'accettazione passiva di misconcezioni consolidate che si sono trasformate in modelli erronei posseduti dagli insegnanti stessi.
Per non creare forti fraintendimenti come quelli rilevati, occorre innanzitutto che l'insegnante sia a conoscenza del significato "istituzionale" dell'oggetto matematico che intende far apprendere; in secondo luogo deve indirizzare l'uso "personale" di questi oggetti in modo consapevole e critico per far sì che questo uso rimanga coerente rispetto alla disciplina di riferimento.

La ripetitività delle rappresentazioni fornite non rappresenta l'unica causa delle misconcezioni *evitabili*; queste spesso dipendono dalle rappresentazioni che risultano mal scelte dall'insegnante stesso.

Un esempio. L'"archetto dell'angolo".
Durante un esame di matematica all'Università, presso la Facoltà di Scienze della Formazione Primaria, si è chiesto ad uno studente non frequentante di spiegare che cos'è un angolo.
A questa sollecitazione lo studente risponde:
«Un angolo è la lunghezza dell'arco»
e, dopo aver chiesto se poteva disegnare, lo studente realizza la seguente "classica" rappresentazione che mette in evidenza l'arco che, a suo parere, identifica l'angolo:



Alla provocatoria sollecitazione del docente:
«Allora, a mano a mano che ti sposti l'angolo diventa sempre più ampio?», supportata dalle seguenti aggiunte al precedente disegno:



lo studente risponde:
«È vero, non ci avevo mai pensato!».
La continua, univoca e impropria rappresentazione fornita da insegnanti diversi, anno dopo anno, ha dato forza nella mente dello studente a caratteristiche "parassite" della rappresentazione a sfavore del concetto. Questo ha comportato che l'allievo identificasse quell'archetto con l'angolo. L'archetto è così diventato l'elemento caratterizzante il concetto proposto e questo ha comportato che lo studente andasse alla ricerca della proprietà che maggiormente lo caratterizza: la sua lunghezza. In questo caso, la misconcezione che si è creata sembra essere *evitabile* in quanto dipende da due diverse cause nessuna delle quali necessaria a priori: la reiterata proposta della stessa rappresentazione, ma anche la scelta della rappresentazione stessa che, meno di altre, rispetta le proprietà del concetto che si vuole far apprendere (la limitatezza dell'archetto contrasta con l'illimitatezza dell'angolo).

Ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta, ai contesti ed alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata.

♦ Le misconcezioni "inevitabili" sono quelle che derivano solo *indirettamente dalle scelte* effettuate dall'insegnante, in quanto sono una conseguenza dall'esigenza di dover dire e mostrare qualcosa di non definitivo per poter spiegare un concetto.
Tali misconcezioni sono quindi imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere per poter comunicare, sapere iniziale che in generale non sarà esaustivo dell'intero concetto matematico che si vuol proporre.

Un esempio. Ampliamento degli insiemi numerici.
Spesso gli allievi tendono a trasferire le conoscenze apprese in un insieme numerico anche in altri insiemi, ma ciò che funziona per uno non è detto che valga anche per altri.
Ad esempio, nell'insieme N dei numeri naturali (0, 1, 2, 3, 4, 5, …), ogni elemento generico n ha un ben determinato successivo $n+1$; l'oggetto matematico "successivo di un numero dato" si forma facilmente e diventa conoscenza corretta e spendibile in aula; ma assume spesso la forma seguente: *ogni* numero (di non importa qual insieme numerico) ha un successivo. Quando si giunge a Q (insieme dei razionali), il che capita più o meno in terza primaria quando si incontrano le prime frazioni o i primi numeri scritti nella forma con la virgola, l'idea di successivo persiste, è una conoscenza precedente che ha avuto successo, ma qui invece dovrebbe perdere di significato. Infatti: non esiste il successivo di $\frac{3}{5}$ e non è certo $\frac{4}{5}$ come si sente dire o come si legge perfino su certi libri di testo, perché

tra $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ vi sono altre infinite frazioni, per esempio $\frac{35}{50}$. Così: non esiste il successivo di 1,4 e non è certo 1,5 come si sente dire o come si legge perfino su certi libri di testo, perché tra 1,4 e 1,5 ci sono altri infiniti numeri, per esempio 1,42. Eppure, tale idea spesso persiste e riaffiora anche nei livelli scolastici successivi e addirittura all'Università.

In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come *inevitabili* momenti di passaggio nella costruzione dei concetti che derivano dalle rappresentazioni che gli insegnanti sono *costretti* a fornire per poter iniziare la presentazione di un concetto, rappresentazioni che potrebbero contenere delle "informazioni parassite" rispetto al concetto matematico che si vuole trattare.

Nell'affermare che, nel presentare un concetto, si è *costretti* a fare i conti con rappresentazioni realizzate per mezzo di segni, ossia con la semiotica, stiamo affermando, in linea con il pensiero di Duval (1993), che: *non c'è noetica* (acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) e che la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica. Detto in altro modo: «In Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche» (D'Amore, 2003).

Eppure, qualsiasi rappresentazione (un disegno, una frase, un grafico, un modello tridimensionale, …) non avrà mai le caratteristiche concettuali di astrattezza, idealità, perfezione, generalità tipiche della matematica e questo potrebbe essere la fonte di quelle *misconcezioni* che abbiamo chiamato *inevitabili*.

Tuttavia, dovendo fare i conti con la semiotica di un concetto, potrebbe accadere che lo studente confonda la semiotica con la noetica, associando le caratteristiche peculiari della specifica rappresentazione al concetto stesso: «(…) Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi *inevitabile*» (Duval, 1993).

L'inevitabilità del passaggio attraverso la semiotica, rende le *misconcezioni* che ne derivano *inevitabili*.

Un esempio. Quando un insegnante mostra per la prima volta ad un bambino di scuola dell'infanzia un modello di cubo rosso, di legno, di una certa dimensione e gli dice: «Guarda, questo è un cubo», il bambino potrebbe credere che il nome "cubo" deve essere attribuito ad un oggetto rosso, di legno, di quelle determinate dimensioni. Tutte queste informazioni percettive, che nel contesto della matematica sono avvertite come "parassite", potrebbero essere invece quelle considerate dall'allievo come caratterizzanti il concetto del quale si sta parlando, essendo tra l'altro più percepibili e immediate.

Tale fraintendimento può derivare solo indirettamente dalle scelte effettuate dall'insegnante, in quanto sono una conseguenza dell'esigenza *inevitabile* di

dover iniziare a dire e mostrare qualcosa per poter cominciare a spiegare un concetto. Lo stesso vale per qualsiasi concetto nuovo che viene proposto agli allievi.
Ma se l'insegnante avrà in seguito la sensibilità didattica di creare le condizioni per superare queste misconcezioni, mostrando modelli di cubi, non di legno, non rossi, non di quelle dimensioni, per poi fornire nel tempo diverse rappresentazioni in vari registri, il bambino lentamente compirà dei passi in avanti nella costruzione del concetto, ampliando le vecchie immagini-misconcezioni, fino a creare una nuova immagine in grado di contemplare tutte le successive sollecitazioni che gli verranno proposte. Ossia, lentamente lo studente annullerà i tratti dell'oggetto che non lo caratterizzano dal punto di vista matematico, per puntare l'attenzione su quelli distintivi che invece lo rappresentano in qualsiasi contesto; in tal modo l'insegnante eviterà il formarsi di modelli scorretti nella mente dello studente.
Al contrario, se l'insegnante mostrerà all'allievo sempre la stessa rappresentazione del concetto, senza pensare alle conseguenze che questa sua scelta potrebbe comportare, si potrebbero verificare *ostacoli di tipo didattico* per il futuro apprendimento.
La misconcezione che ne potrebbe derivare in quest'ultimo caso si può dunque considerare *evitabile*.

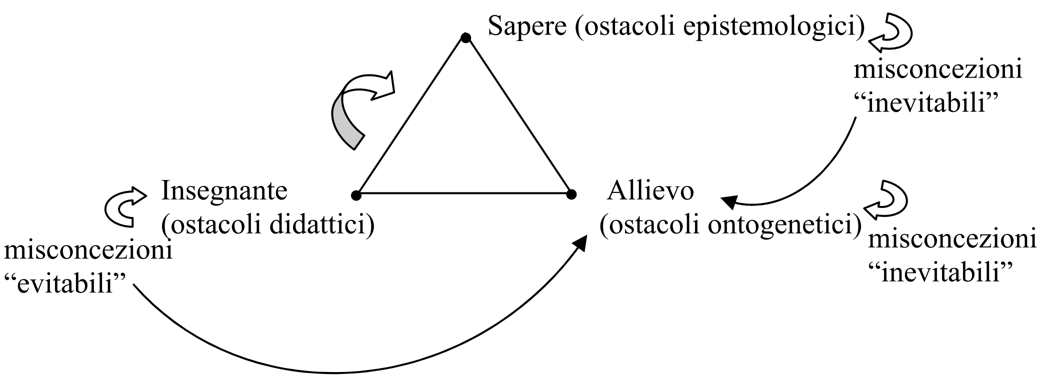
Le riflessioni precedenti ci portano alle seguenti conclusioni.
Sappiamo che: «Ogni azione cognitiva è un'azione mediata da strumenti materiali o simbolici» (Moreno Armella, 1999), ma siamo anche consapevoli che il *milieu* o *ambiente* si oppone a chi deve imparare. Il milieu deve quindi essere strutturato e predisposto dall'insegnante in modo opportuno, con strumenti opportuni, allo scopo di giungere, alla fine dell'attività, ad una corretta conoscenza specifica.
L'obiettivo didattico da porsi deve quindi mirare alla strutturazione coerente e significativa dell'*ingegneria didattica* in modo tale da creare un ambiente all'interno del quale l'allievo, attraverso adattamenti progressivi delle sue conoscenze provvisorie, apprenda. L'insegnante provoca questi adattamenti servendosi di una scelta appropriata della situazione proposta che, se non è pensata criticamente a priori, può essere fonte di ostacoli per gli apprendimenti futuri degli allievi: «La conoscenza dipende anche e proprio da quegli strumenti di mediazione che mettiamo in campo per la sua costruzione, e dall'insieme e dal tipo di significazioni che tali strumenti ricevono dall'intorno sociale» (D'Amore, 2003). Per questo l'ingegneria didattica deve essere pensata e organizzata dall'insegnante in modo da aiutare a "combattere" i contrasti causati dall'ambiente o insiti in esso, nel tentativo di non creare misconcezioni "evitabili" e di superare misconcezioni "inevitabili", allo scopo di favorire una efficace costruzione dei concetti matematici.
È importante inoltre che l'insegnante strutturi strategie didattiche per la prevenzione e il superamento delle misconcezioni, principalmente di carattere trasversale, per sviluppare consapevolezza e processi di controllo efficaci negli allievi. Per raggiungere tali obiettivi l'insegnante deve anche svolgere il ruolo cruciale di organizzatore di situazione adeguate a portare alla luce eventuali

misconcezioni (Zan, 2007). In questo, l'insegnante può trarre suggerimenti dalla ricerca in didattica della matematica che mette alla luce la presenza di numerose misconcezioni tipiche.

5. Ostacoli e misconcezioni insieme

Come abbiamo messo in evidenza, i termini "ostacolo" e "misconcezione", presentano oggi in didattica della matematica una differenza sostanziale dalla loro idea semantica intuitiva.

Volendo trovare un collegamento tra questi due elementi di analisi del processo di costruzione del sapere, possiamo osservare che gli ostacoli ontogenetici ed epistemologici sembrano essere legati all'idea di misconcezioni "inevitabili", dato che dipendono sia dalla maturità dell'allievo nel poter concepire uno specifico sapere matematico (ostacolo ontogenetico), sia dal concetto stesso che viene proposto, spesso complesso da un punto di vista epistemologico (ostacolo epistemologico); mentre le misconcezioni "evitabili" sono legate all'idea di ostacolo didattico che dipende dalla trasposizione didattica e dall'ingegneria didattica scelte dall'insegnante. Tutte le misconcezioni, indipendentemente dalla natura, solo riferite all'apprendimento dell'allievo.



È quindi compito del docente avere una notevole attenzione nei confronti delle misconcezioni e degli ostacoli che si possono presentare durante il processo di insegnamento-apprendimento: rendersi conto che quelle che lo studente crede essere concezioni corrette, possono essere in realtà delle misconcezioni e che la causa di tali misconcezioni possono dipendere dai diversi tipi di ostacoli.

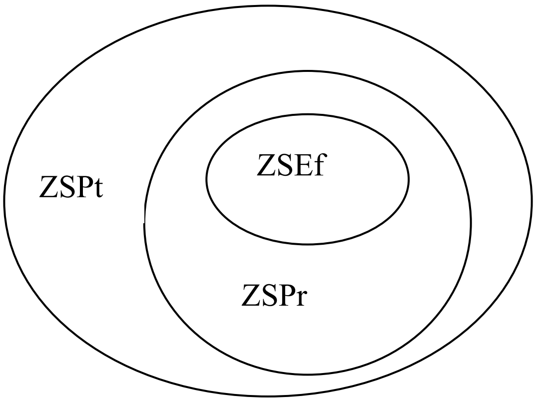
Ostacoli e misconcezioni sono dunque fortemente connessi, specie se l'ottica con cui si guarda a questi aspetti è quella delle difficoltà dell'allievo nella concettualizzazione matematica.

6. Lo studente come ricercatore

Sulla base di quanto fin qui affermato, non si scorge nessuna rilevante differenza tra

- il lavoro dello scienziato che, basandosi sulle proprie conoscenze, avanza sulla strada della scienza, tentando di percorrere nuove vie e dunque, fatalmente, commettendo degli errori che si riveleranno poi produttivi nella conquista del sapere;

- il lavoro dello studente che, basandosi sulle proprie conoscenze, nella zona di sviluppo effettivo, avanza nella strada della conoscenza, nella zona di sviluppo prossimale e dunque, fatalmente, commettendo quegli errori attesi dal docente, quelli correggendo i quali, discutendo i quali, si creeranno nuove immagini più potenti e comprensive del concetto in gioco, verso la creazione di un modello corretto, adeguato, stabile, seguendo la terminologia di Vygotskij.



ZSEf: zona di sviluppo effettivo
ZSPr: zona di sviluppo prossimale
ZSPt: zona di sviluppo potenziale

Spesso si dice che l'errore non va considerato come qualche cosa di necessariamente negativo, ma poi non si sa come interpretare questa frase. A noi pare che, nell'accezione qui presentata, si restituisca significato ad una frase che, altrimenti, sembra vuota e sterile.
La storia della matematica come quella di ogni scienza comprende anche errori; l'errore è una tappa *inevitabile* e *proficua* di un progresso significativo della conoscenza. L'analogo avviene in ogni singolo allievo, nella costruzione del suo apprendimento.

7. L'interpretazione degli errori

L'attenzione alle tematiche qui presentate, fin dal loro apparire nel mondo delle scienze, è stata molto produttiva perché ha costretto gli studiosi a non identificare più gli errori come qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma come prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione. Da questo punto di vista, Zan (2007) afferma: «Non si può ignorare o sottovalutare la svolta radicale che l'idea di misconcetto e l'approccio all'errore che essa veicola ha rappresentato nel momento e nel contesto in cui è nata, con il suo mettere l'allievo ed i suoi processi di pensiero al centro dell'attenzione del ricercatore e dell'insegnante. È questo spostamento di punto di vista che qui mi interessa, spostamento coerente con un modello d'apprendimento che riconosce al discente il ruolo di interprete dell'esperienza, e di soggetto attivo che costruisce la propria conoscenza. Più precisamente mi interessa sottolineare come questo modello metta in crisi l'interpretazione tradizionale degli errori, che li vede semplicemente prodotto di conoscenze insufficienti».
Gli studi in questi settori sono quindi accomunati:

- dalla motivazione a capire le radici delle misconcezioni, e non solo ad eliminarli;

- dallo sforzo di assumere il punto di vista di chi apprende, piuttosto che quello dell'esperto;
- dall'accettazione della ragionevolezza delle misconcezioni e quindi la necessità che l'allievo ne percepisca i limiti come pre-requisito per modificarli.

Dunque, non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, di mancanza di conoscenze o abilità, ma della evidenziazione di difficoltà nel senso sopra citato.

L'importanza di fornire all'errore un'interpretazione non negativa permette anche di evitare che si crei negli allievi la paura di sbagliare e che vengano associati ad essi sentimenti negativi come: paura, panico, frustrazione, vergogna, ansia, angoscia, rabbia, noia, senso di inadeguatezza che accompagnano spesso l'apprendimento della matematica. Questi sentimenti negativi fanno riferimento a come l'allievo interpreta l'esperienza.

Occorre quindi creare situazioni dove l'errore possa verificarsi senza paura in un ambiente collaborativo, centrato sui processi più che sui prodotti, dove si fa vivere l'errore come una risorsa didattica (Borasi, 1996) e una opportunità per imparare e attivare processi di pensiero significativi.

Scriveva il filosofo Popper (1972, pag. 242).: «(…) evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l'errore quasi *inevitabile,* non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In effetti, è dalle nostre teorie più ardite, incluse quelle che sono erronee, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi»

La critica di Popper ad evitare di compiere errori è una critica indiretta agli insegnanti che cercano di eliminare le occasioni di errori, anche se è proprio da questi che possono nascere importanti considerazioni. Spesso infatti si rischia, soprattutto in casi di difficoltà, di abbassare le richieste per evitare errori, ma non è questo l'obiettivo che si deve perseguire, anche perché la mancanza di errori non garantisce la mancanza di difficoltà. Infatti, l'identificazione del successo secondo la risposta corretta fornita dall'allievo non è indice di reale comprensione essendo principalmente legata a prodotti e non a processi e non è certo su questo che si riesce a stabilire se l'allievo ha costruito in profondità un sapere.

8. L'importanza del contesto

Come abbiamo osservato in precedenza, all'origine di certe difficoltà anche notevoli potrebbe celarsi, a volte si cela, un fatto meramente matematico, ma in una visione pragmatica nella quale collochiamo il processo di insegnamento-apprendimento, le decisioni prese da un soggetto, e quindi anche la razionalità delle sue scelte e dei suoi comportamenti, vanno lette alla luce del contesto in cui un soggetto si colloca e degli scopi che caratterizzano tale contesto; elementi che a volte non coincidono con quelli individuati dal docente. Come sostiene Zan (2007, pag. 60): «Se l'insegnante assume come scontato che l'allievo si è posto un certo obiettivo (quello che l'insegnante vorrebbe che si ponesse), tenderà a giudicare irrazionali strategie che viceversa apparirebbero consistenti alla luce di obiettivi e contesti alternativi».

Si noti che la spinta in questa nostra direzione va verso una maggior consapevolezza nella quale deve essere immerso l'allievo quando fa matematica.
Se il contesto non si esplicita, può succedere che l'insegnante se ne aspetti uno e che l'allievo ne pensi un altro, diverso.
Se la risposta dell'allievo non coincide con quella attesa dall'insegnante, difficilmente l'insegnante è in grado di rimettere in gioco la propria posizione e discuterla, accettando il complesso: risposta data – ambito proposto dall'allievo. È assai più semplice, più sbrigativo, più immediato semplicemente correggere la risposta dell'allievo, dando la propria. Ma l'allievo mantiene il suo contesto in mente, il che significa che la riposta imposta dall'insegnante, rispetto al contesto conservato dall'allievo, semplicemente non funziona. La difficoltà che ne nasce, ancora una volta, può essere molto negativa; lo studente rinuncia a collaborare, a farsi carico diretto della responsabilità del proprio apprendimento e delega all'insegnante la scelta delle risposte che *devono essere date*, cosa che, però, nell'intimo, allo studente sembra del tutto casuale.
In effetti, a volte, abbiamo avvertito malessere nelle aule da parte degli studenti che dovevano dire quel che veniva loro chiesto di dire, ma contro quel che essi stessi percepivano. Questo tipo di difficoltà, che restano per lo più nascoste all'inizio, si rivelano nella loro interezza nel corso del processo di apprendimento. Lo studente vede o capisce qualcosa, ma gli viene richiesto di dire altro; dicendo questo altro sa che avrà il compiacimento dell'insegnante; e così apprende a dire quel che gli viene richiesto e non quel che vorrebbe dire spontaneamente. Questo accordo implicito genera difficoltà di notevole fattore negativo, soprattutto avvertibile proprio in matematica. La matematica cambia statuto epistemologico, nella testa dello studente: in matematica non devi dire quel che credi, ma quel che sai essere atteso.
Lo studente si fa così l'idea di non essere adeguato, di non saper dare le risposte attese, di non saper ragionare in modo coerente e logico, di non essere adatto all'apprendimento della matematica, con le conseguenze che sappiamo. Lo studente si fa di sé stesso un'immagine negativa che difficilmente potrà poi essere recuperata. Può essere l'inizio di gravi difficoltà.

9. Un accenno al recupero

Per quanto riguarda il recupero delle difficoltà, bisogna tener conto che di solito l'approccio usuale alle difficoltà degli allievi risulta fallimentare.
Le azioni didattiche standard di recupero come la ripetizione degli argomenti, la correzione degli errori, la messa in guardia dagli errori tipici, il ripetere esercizi simili a quello dove si era verificato l'errore, il mostrare il procedimento corretto, sembrano non funzionare e aumentano ancora di più la distanza fra gli allievi con difficoltà in matematica e gli allievi "bravi".
Inoltre occorre tener conto che il recupero parte dal presentarsi di un errore e che è l'insegnante stesso a interpretarlo in modo soggettivo. In effetti l'errore è oggettivo mentre la sua interpretazione non lo è: un docente può considerare quell'errore grave mentre un altro poco importante. Ovviamente come sostiene Zan (2007): «L'interpretazione dell'insegnante è necessaria come ipotesi di lavoro per l'intervento di recupero: ne suggerisce infatti la direzione. Ma è importante

che l'insegnante sia consapevole che la sua interpretazione è solo una delle tante possibili, e risente delle sue esperienze, dei suoi schemi interpretativi, delle sue convinzioni: solo così sarà pronto a metterla in discussione in caso di fallimento della strategia didattica adottata».
Il fallimento di un intervento di recupero può dipendere quindi sia dall'inefficacia della strategia scelta e adottata, sia dall'interpretazione dell'errore dalla quale ha avuto origine; tale fallimento può portare anche a frustrazione nell'insegnante stesso.
Per questi motivi occorre affinare strategie adeguate e strumenti per affrontare il problema dell'intervento sulle difficoltà, per i quale rimandiamo a Zan (2007).
Occorre strutturare situazioni didattiche significative che puntino alla motivazione e volizione dell'allievo e dove quest'ultimo partecipi in prima persona costruendo attivamente il proprio sapere e interpretando l'esperienza vissuta. Situazioni dove assume un ruolo rilevante la comunicazione, dove contano il contesto e gli scopi specifici dell'esperienza e dove si studia il modo in cui i diversi registri di rappresentazione semiotica: aritmetico, figurale, preposizionale, gestuale, … vengono usati per comunicare.

10. Il laboratorio di matematica

L'idea di *laboratorio di matematica* come ambiente adatto all'apprendimento della matematica è assai diffusa fin dagli anni '70-'80.
Seguendo l'interpretazione di D'Amore, per laboratorio di matematica si intende:
«"laboratorio" è un ambiente dove si costruiscono oggetti, si lavora concretamente, si ottiene qualche "cosa"; soprattutto è caratteristica del laboratorio una certa qual pratica inventiva; nel laboratorio deve essere viva una tensione verso l'ideazione, la progettazione, la realizzazione di qualche cosa di non ripetitivo né banale;
"di matematica" perché l'oggetto concreto, risultato finale della realizzazione, è di contenuto matematico.
Dunque, il laboratorio di matematica è un luogo nel quale si costruisce qualche cosa di concreto che ha a che fare con la matematica» (D'Amore, Marazzani, 2005).
Si possono costruire tassellazioni, calcolatrici, materiali che rappresentino le trasformazioni geometriche, solidi, strumenti per la risoluzione di semplici equazioni, per rappresentazioni topologiche, ...
Detto ciò, il laboratorio di matematica nella sua formulazione iniziale assai vincente (Caldelli, D'Amore, 1986; D'Amore, 1987; 1988; 1990-91) dovrebbe essere uno spazio a sé stante, staccato dall'aula, con regole di comportamento proprie e con personale diverso dall'insegnante di classe e dove non vi è valutazione su quanto è stato realizzato.
Ovviamente, partendo da questa situazione ideale, il laboratorio, per mancanza di spazi attrezzati, può essere l'aula stessa; il tecnico di laboratorio, per mancanza di personale, può essere l'insegnante stesso; ma sicuramente questa impostazione "debole" di laboratorio di matematica non ha la stessa efficacia di quella "forte".

Se l’ambiente rimane lo stesso, e anche l’insegnante, è più facile che l’allievo si senta valutato per i suoi tentativi a volte goffi di creare matematica, quindi possono scattare giusti meccanismi di difesa: può cessare la sua libera attività creativa; può non rischiare più in prima persona, ma cercare di capire che cosa si vuole da lui.
In ogni caso, come primo approccio ad un cambiamento di impostazione nell’insegnare matematica a studenti con precedenti percorsi scolastici negativi alle spalle, anche l’interpretazione “debole” dell’idea di laboratorio di matematica può essere una buona partenza, soprattutto per Centri di formazione con una forte valenza professionalizzante.
L’idea vincente e che speriamo si possa applicare in futuro sarebbe di affiancare laboratori tecnici professionalizzanti a laboratori di matematica (nel senso “forte” del termine, in uno specifico ambiente e con personale tecnico specializzato diverso dall’insegnante di classe) dove si realizzano oggetti pensati per saperi matematici di base, indispensabili per l’interpretazione di ciò che gli allievi incontrano a scuola ma soprattutto nella vita di tutti i giorni.
In questo primo anno di sperimentazione le attività sono state principalmente realizzate in classe, anche se non sono mancate esperienze in giardino, in laboratori tecnici, o in altri ambienti; queste attività sono però sempre state gestite dall’insegnante di classe.
Si è comunque cercato di strutturare situazioni didattiche dove gli allievi erano i veri protagonisti della progettazione dell’attività, dove, dopo un’ampia discussione iniziale, la realizzazione dell’esperienza o dell’oggetto matematico/artefatto era gestita dal singolo o dal gruppo. Agli allievi è quindi stato richiesto di agire, fare, verificare e dunque di porsi nell’àmbito di una pedagogia attiva, *implicandosi* e facendosi carico personale della *costruzione* non solo del sapere, ma anche dell’artefatto attraverso il quale il sapere concretamente transita. Va ricordato che un artefatto è sempre il risultato di un’evoluzione culturale, e come tale incorpora delle idee, per questo il significato non può risiedere unicamente nell’oggetto né può emergere dalla sola interazione tra studente e oggetto, ma risiede negli scopi per i quali l’oggetto è usato, e nel contesto in cui si svolge l’attività.
Questa responsabilizzazione dell’allievo nella costruzione del proprio sapere attraverso la progettazione e la realizzazione di oggetti o dell’esperienza, consente allo studente sulla strada della *motivazione*, di giungere alla *volizione* che è la molla affettiva necessaria della costruzione di competenza. In effetti, c’è una vera costruzione di apprendimento concettuale solo se si è coinvolti responsabilmente in tale costruzione e se si percepisce un gusto all’apprendimento: questo può avvenire solo se quel che si offre come contenuto di riflessione, di scoperta, di sistemazione, è confacente al bisogno di chi apprende. Occorre quindi una buona scelta delle situazioni didattiche perché se i contenuti dell’insegnamento sono o troppo distanti dalle necessità problematiche dell’apprendente o troppo banali il processo rischia di non funzionare.
In questa impostazione, l’insegnante stimola e si mette in disparte, lasciando all’allievo una grande responsabilità. Ossia, il ruolo dell’insegnante è di sollevare un problema, di produrre il bisogno di una realizzazione pratica, di dirigere il

dibattito in aula, infine, con il suo potere istituzionalizzante, di sancire l'eventuale adeguatezza del prodotto costruito dagli allievi e delle scoperte avvenute.
Con questa impostazione didattica la valutazione deve avere ampio respiro, sia nei confronti dell'azione dell'allievo che dell'insegnante e deve essere determinata da un'ampia gamma di elementi (Fandiño Pinilla, 2002).
Possiamo quindi dire in questo primo anno di sperimentazione di avere impostato non un laboratorio di matematica in senso "forte", ma una metodologia didattica, un atteggiamento, che ha cambiato le relazioni interpersonali in aula tra i tre "vertici" del triangolo della didattica.

11. I nuclei fondanti

Per quanto riguarda i contenuti da proporre, occorre sviluppare negli allievi quelle abilità e competenze di base indispensabili per una formazione culturale del cittadino che rispondono alle necessità sociali riconosciute e condivise come: porsi e risolvere problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, creare collegamenti tra conoscenze diverse, …
L'idea è di fornire dei contenuti spendibili fuori dal mondo della scuola, nella vita quotidiana, da "cittadini" più che da "studenti" (Arzarello, Robutti, 2002); si tratta quindi di individuare degli importanti contenuti che costituiscono il cuore fondante, il nucleo attorno al quale ruotano altri contenuti. Si tratta quindi di vagliare con cura quelli che sono detti "nuclei fondanti" o "nodi concettuali": «Per nucleo fondante di una data disciplina potremmo intendere dei contenuti-chiave per la struttura stessa della disciplina, non tanto sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale, epistemologico» (D'Amore, 2000). Avvenuta la scelta dei contenuti fondanti specifica della trasposizione didattica occorre passare all'azione didattica: «Si tratta di elaborare strategie didattiche nelle quali lo studente viene non attirato a prendere in esame catene di contenuti, ma a partecipare alla costruzione della sua propria competenza a partire da concetti scelti in modo tale da costituire interesse di per sé e sviluppi che coinvolgono ed amalgamano altri contenuti ritenuti chiave nello sviluppo della disciplina (la storia e l'espistemologia delle singole discipline possono aiutare molto in questa fase)» (D'Amore, 2000).
È quindi importante insegnare per nuclei fondanti, creando una «rete concettuale, strategica e logica, fine e intelligente, non certo ridurre le richieste: anzi, la scelta del nucleo è un modo per provare la tenuta delle sfide culturali! Ogni concetto è in realtà, come deve essere, il traguardo di un complesso sistema a maglie: d'altra parte, non esistono concetti totalmente isolabili e fanno parte di un concetto reti di relazioni più che singoli "oggetti" concettuali» (D'Amore, 2000).
Vanno quindi scelti quei contenuti che hanno valore strutturante e generativo di conoscenze, con valore formativo esplicito e che rappresentano gli assi portanti dell'intero percorso di formazione e della vita degli allievi come cittadini.
Per riuscire ad individuare al meglio tali nuclei occorrono strumenti nella storia ed epistemologia della disciplina e nella ricerca psicopedagogia e didattica.

12. Le convinzioni di allievi e insegnanti e il loro cambio

Tutto il discorso fin qui affrontato sulle difficoltà nell'apprendimento della matematica e il loro superamento porta immediatamente a parlare delle convinzione e concezioni che hanno gli allievi e, ovviamente, che hanno gli insegnanti, influenzate dalle personali scelte, gusti, esperienze, valori, …; vari studi sono stati fatti per collegare questi due punti in una sorta di implicazione e rivelano immediatamente il grande impatto che questo tipo di considerazioni ha dal punto di vista didattico.

Per affrontare tale analisi ci serviremo preliminarmente di una distinzione che appare in D'Amore, Fandiño Pinilla (2004) e che facciamo nostra:

«- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;

- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T.

Spesso, in luogo di "concezione di A relativamente a T" si parla di "immagine che A ha di T" ».

Noi ci occupiamo qui solo del caso in cui T sia la matematica, o la didattica della matematica.

Per quanto riguarda le convinzioni è importante ricordare il lavoro di Schoenfeld (1992) che arriva a sostenere che ogni individuo concettualizza la matematica e si pone nell'ambiente matematico proprio in base al sistema delle proprie convinzioni sulla matematica, il che implica che è impossibile separare conoscenze (di matematica) e convinzioni (sulla matematica) negli insegnanti.

Tra gli altri classici studi in questo campo ricordiamo: Pehkonen (1994) che offre una bibliografia estesa sul tema, trattando in particolare le convinzioni degli insegnanti sulla matematica e il conseguente cambiamento nell'insegnamento. Inoltre, vanno ricordati gli studi effettuati da Llinares: quello del 1999 dove punta l'attenzione sulla relazione dialettica tra convinzioni e pratica mostrando come è difficile indicare se le convinzioni dirigono la pratica o viceversa e quello del 2002 dove l'autore mette in evidenza il ruolo delle convinzioni nel processo legato all'apprendere ad insegnare secondo una prospettiva situata: quel che si apprende dipende da quello che si problematizza e si codifica negli ambienti di apprendimento. In pratica si mette in evidenza come le convinzioni (insieme ad altri fattori) influiscono su cosa si apprende e su come si apprende.

Inoltre, gli studi di Tirosh e Graeber (2003) rilevano che le convinzioni possono essere un ostacolo ma anche una potente forza che spinge ad effettuare cambiamenti nella pratica personale dell'insegnamento.

La sperimentazione affrontata in questo anno ci ha spinto a considerare anche il problema del "cambio di convinzioni" nel senso dello "sviluppo - modifica delle convinzioni nel passare del tempo" (Wilson, Cooney, 2002); a tal proposito, in da Ponte et al. (1999) viene presentata una sintesi delle ricerche rivolte al cambio di convinzioni e di insegnamento nei docenti, alla quale rimandiamo per un approfondimento. Per un ulteriore studio di questa tematica si vedano i lavori di

D’Amore, Fandiño Pinilla (2004), Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla, Sbaragli (2006) e Iori (2007-2008).
Giunti alle ultime ore del corso-sperimentazione relativo al progetto degli standard minimi si è chiesto agli insegnati coinvolti di riflettere sulle loro personali convinzioni e di considerare criticamente a posteriori i cambi di convinzioni sulla matematica, sulla didattica della matematica e sul ruolo dell’insegnante di matematica osservati su sé stessi nel corso di questo anno, a causa degli insegnamenti seguiti e della sperimentazione affrontata; tale riflessione è avvenuta in gruppo e si è conclusa con il seguente scritto.

13. Il punto di vista degli insegnanti

Emanuele Bellio, Claudio Buttelli, Paola Ferioli, Catia Govoni, Paolo Koussis, Roberto Panzacchi, Stefania Pigozzi, Benedetta Quadrini, Leonardo Vivarelli, Alessandro Zucchini

La scelta di scrivere un unico bilancio della sperimentazione da parte di tutto il gruppo dell’area matematica deriva dalla coesione dei punti di vista degli insegnanti che ne fanno parte.
Ovviamente ognuno di noi ha le proprie personali convinzioni sulla matematica, sulla didattica della matematica, sul processo di insegnamento-apprendimento, derivanti dalle diverse esperienze di vita e di lavoro: alcuni insegnano da diversi anni discipline diverse dalla matematica, mentre altri erano alla prima esperienza.
Pur con le nostre diversità di vita, personalità, convinzioni ci siamo sentiti uniti nell’affrontare questo percorso di formazione e soprattutto uniti nel giudizio di ciò che è avvenuto nella sperimentazione.
Tutti noi abbiamo iniziato questo percorso associando alla matematica pareri ed emozioni positive, considerandola una disciplina: interessante, utile, affascinante, appassionante, necessaria.
Inoltre, riconoscevamo nella matematica una connotazione pratica derivante forse dai nostri interessi: la maggioranza di noi è laureata in discipline scientifiche come chimica, fisica, ingegneria, …; eppure concepivamo la matematica principalmente come strumento per altre discipline, come applicazione ai diversi contesti della vita che ci circonda, ma non tanto come disciplina in sé: «Ho sempre considerato la matematica a servizio di altre discipline per scelta del Centro al quale faccio parte, ma mai come disciplina in sé, a servizio di sé stessa, con il gusto di scoprirla».
Dopo il corso il nostro positivo punto di vista sulla matematica è stato ulteriormente rafforzato, il suo fascino è stato alimentato, grazie all’entusiasmo e alla passione della relatrice che sono stati per noi contagiosi.
Il corso ci ha trasmesso la voglia di approfondire, di ricercare informazioni, di documentarci, di metterci in gioco, di sperimentare i diversi aspetti della matematica e per alcuni di noi della sua storia: «Prima del corso “forse” conoscevo la matematica, o meglio avevo in testa la classica teoria dei testi, dopo il corso mi sono venuti dei dubbi al riguardo e da lì è scattata la scintilla per documentarmi di più e per capire che cosa migliorare o cambiare»; «Se posso

sintetizzare in una parola il corso direi “stimoli”, perché ha aumentato il mio senso critico, stimolando quindi la mia curiosità a saperne di più sia sulle mie conoscenze della materia sia su come insegnarla e soprattutto sul come farla capire ai ragazzi»; «Conoscevo la matematica, almeno in parte, ma quest’anno ho ampliato gli orizzonti»; «Credevo di sapere più cose, ho scoperto di saperne meno, ma sono contenta».

Dal punto di vista della disciplina ciò che è stato notevolmente modificato è stato l’acquisizione del senso critico. Se prima la matematica veniva vista come una certezza, una teoria intoccabile, non discutibile, e senza evoluzione, dopo il corso si è compreso che questa disciplina, essendo costruita dall’uomo, non è un sapere certo, assoluto e statico, ma può essere interpretato e rivisto in modo personale e con senso critico: «Questo corso mi ha insegnato ad essere più critica rispetto al “dogma matematico”»; «Ho acquisito molti nuovi strumenti, maggiore consapevolezza e conoscenza della materia»; «Prima vedevo la matematica in modo formale, ora ha assunto significato».
Si è compreso che non c’è un solo modo per definire gli oggetti matematici e che queste definizioni vanno costruite, condivise, analizzate e non solo imparate. Questo ha comportato che se prima pensavamo di sapere e di saper fare bene la matematica poi, grazie al corso, ci siamo resi conto di non possederla con convinzione e di non averla mai guardata da più punti di vista e in modo profondo. Non avevamo mai messo in discussione ciò che ci era stato presentato nel percorso di studi, ciò che avevamo appreso come insegnanti e che si trova nei libri di testo, ma dopo il corso questa ottica con sorpresa è cambiata: «Il corso mi ha notevolmente arricchito perché mi ha messo dei dubbi, anche se ero appassionato anche prima. Mi ha aperto nuove strade per vedere cose diverse che prima non vedevo. Dovendola insegnare, bisogna saper vedere e dare più punti di vista per saper trasferire gli argomenti ai ragazzi».
Invece ora, grazie al corso, ci siamo resi conto delle ambiguità che possiamo fornire agli studenti, dicendo le cose in un unico modo e a volte confuso. Abbiamo avuto l’“umiltà” di chiederci, forse per la prima volta in profondità, che cosa sono saperi di base come: un quadrato, un’altezza, un numero primo, una faccia del cubo… cercando di capire i fondamenti e tutto ciò che si cela dietro a questi concetti. Non ci eravamo mai soffermati a pensare alla matematica in questo modo e ora ci chiediamo perché ciò non è potuto avvenire prima.
Il corso ha aperto in noi un nuovo modo di vedere questa disciplina, e non solo, dato che il senso critico è possibile trasferirlo in tutto ciò che proponiamo ai nostri allievi.
Continuare a formarci su ciò che insegniamo è diventata quindi per noi un’esigenza, una risorsa preziosa e irrinunciabile. Qualcuno di noi ha infatti seguito ulteriori convegni oltre alla sperimentazione e continuerà a seguirli con passione in futuro. Gli spunti, le attività, i problemi, i giochi che ci sono stati forniti durante il corso sono stata una risorsa in ogni situazione: durante le lezioni, nei momenti di svago, nelle giornate più impegnative dove qualcuno di noi ha svolto addirittura cinque ore di matematica.

Questa disciplina è diventata per noi una forma di educazione, tutta da scoprire e approfondire dato che va molto oltre ai giudizi e al senso comune che le vengono spesso ingiustamente attribuiti. Per mezzo di queste riflessioni ci sentiamo oggi più forti, come "chi ne sa di più" o come "chi sa qualcosa in modo diverso … migliore" e ancora come "chi sa che c'è ancora molto da imparare".

Ma la grande rivoluzione per noi è avvenuta soprattutto sull'aspetto metodologico e didattico. Nessuno di noi aveva seguito in precedenza un corso di didattica della matematica, forse non ne conoscevamo neanche l'esistenza e l'utilità, e per questo l'atteggiamento iniziale è stato di scetticismo e diffidenza nei confronti delle proposte, che si è poi trasformato in stima, passione e riconoscenza. Su questo è avvenuto il vero cambio di convinzione, se prima ritenevamo che le proposte della relatrice potessero essere di difficile attuazione, poi ci siamo dovute ricredere, ritenendole vincenti non solo sui contenuti, ma soprattutto sulla metodologia. Ricordiamo ancora bene le nostre facce perplesse iniziali, i nostri dubbi e la paura di cambiare, di metterci in gioco: «All'epoca però, se ero convinta che ciò che sosteneva Silvia potesse funzionare bene all'infanzia, dubitavo un po', malgrado l'entusiasmo, potesse essere una metodologia valida anche per i miei "bulletti quasi maggiorenni"».
Invece, l'ottica del *laboratorio di matematica* dove gli allievi costruiscono attivamente il proprio sapere, a volte manualmente, a volte mentalmente, è stata una risorsa vincente. Abituati al laboratorio soltanto di altre discipline distinte dalla matematica: meccanica, elettronica, chimica, scienze, … non credevamo di poter applicare lo stesso metodo anche per la matematica: «Credo che una didattica alternativa, intesa come lavori di gruppo, a coppie, tramite esperienze ludiche, …, dove gli allievi sono partecipanti attivi sia efficace rispetto alla classica didattica frontale. Questa idea l'avevo anche prima del corso, ma sicuramente mi mancavano gli strumenti per concretizzarla. Il corso mi è servito soprattutto per questo»; «Sinceramente io quest'anno mi sarei trovato in serie difficoltà, consapevole del fatto che dovevo affrontare allievi refrattari alla matematica, ma questo mio punto di vista è notevolmente cambiato dopo il corso, grazie ai contenuti e in modo radicale grazie alla metodologia. Ora vedo in prospettiva altre idee e percorsi didattici interessanti da impostare al fine di coinvolgere maggiormente gli allievi. Ora sono aumentati i momenti in cui assumo il ruolo di facilitatore e guida in attività in cui operano gli allievi»; «Ho scoperto che è veramente interessante partire dalle loro competenze cercando di scoprire che cosa sanno per poi strutturare le lezioni»; «Mi è servito a fermarmi a guarda che cosa c'è dietro alle cose, a riflettere, a non avere più certezze, a mettere in dubbio ciò che propongo in classe. Ora ho proprio una gran voglia di fare nuove proposte ai miei allievi, peccato che sia finito l'anno».
Solo uno di noi ha sostenuto: «Il metodo che avrei utilizzato sarebbe stato sostanzialmente lo stesso proposto, ma sicuramente molto meno ricco di strumenti e con meno sicurezza. Mi sento rassicurato e sostenuto dal fatto che chi studia e teorizza difende questo metodo».
Senza questo percorso di formazione, alcuni di noi avrebbero riprodotto un insegnamento standardizzato, formale, riproducendo ciò che avevano vissuto

come allievi, riproponendo questa disciplina come avevano sempre fatto, senza cercare strategie alternative. Eppure, siamo ora consapevoli che questo modo di procedere non avrebbe portato ai risultati avuti oggi: «Sinceramente sarei stata più la prof alla lavagna e meno colei che propone matematica a tutti i ragazzi, rendendoli per un po' "piccoli ricercatori" delle questioni poste senza essere imposte (e avrei commesso un errore)»; «Avrei forse utilizzato più lezioni frontali soprattutto per introdurre gli argomenti invece che per formalizzare le conoscenze dei ragazzi»; «Il ruolo dell'insegnante come regista è stato per la mia esperienza nuova e affascinate. È stato fondamentale soprattutto con la mia tipologia di allievi»; «Ritenevo la matematica troppo complessa per gli allievi con cui avevo a che fare. Quest'anno ho scoperto, che la matematica si può proporre in modalità "ludica" coinvolgendo anche i ragazzi "difficili"»; «Ora sono convinto che se l'insegnante propone una cosa solo spiegando, e gli allievi solo ascoltando, non ha risultato. Invece, l'attività di gruppo, di scoperta, di confronto porta a vero apprendimento. Mi ha dato forza sentire che fosse possibile e quindi l'ho sperimentato con successo».

Abbiamo ragazzi con pessime convinzioni su questa disciplina e su di sé dal punto di vista scolastico, con percorsi alle spalle di vita e di studi fallimentari, ai quali per prima cosa era necessario cambiare le aspettative, l'opinione di sé e di questo sapere. Una di noi ha descritto i suoi allievi come: «Ragazzi quasi maggiorenni, uniti anche fuori dalla scuola, un po' duri e corazzati, poco tolleranti, all'apparenza restii e poco fiduciosi nei grandi e nei loro sistemi, piccoli James Dean di mezzo secolo dopo, piccoli Step di oggi».
Ovviamente le tipologie di allievi delle nostre classi erano tutte diverse l'una dall'altra, anche in funzione dell'indirizzo formativo del Centro: non in tutte erano presenti i ragazzi sopra descritti, ma in ogni caso una costante univa tutti i nostri allievi: la delusione e un senso di fallimento nei confronti della scuola. Su questo era importante agire, lavorare, per dare loro fiducia di potercela fare e voglia di mettersi di nuovo in gioco; per questo l'approccio didattico è stato l'elemento vincente del corso: «Secondo me ci è stato insegnato uno stile universalmente e trasversalmente applicabile a qualsiasi attività avessimo svolto, un modo critico ma gioioso di lavorare, un modo aperto ma rigoroso di operare».
Interessante è stato per alcuni di noi chiedere semplicemente: Che cosa pensi di questa forma? Qual è il rettangolo più bello?, scoprendo così il punto di vista più personale degli allievi, legato anche ad un senso estetico e al gusto, ma allo stesso tempo cercando di non transigere sulla correttezza di ciò che si esplicitava. Il punto di forza in aula per attirare l'attenzione, l'ascolto, la partecipazione di chi si è sempre sentito matematicamente fallito, sono state frasi del tipo: "Lavoriamo con le mani", "Ora ritagliamo", "Costruiamo insieme", "Confrontatevi", "Provateci da soli", …
Abbiamo quindi chiesto ai ragazzi di osare costruendo il sapere in prima persona.

Giunti all'ultimo incontro ci sentiamo tutti cambiati, chi più, chi meno, ma cambiati.

L’efficacia del percorso è avvenuta a nostro parere soprattutto grazie al confronto del gruppo con la relatrice. L’ascolto delle sue proposte, la nostra diffidenza iniziale, gli interventi, le domande e le questioni che sono state poste alla relatrice durante il corso di formazione sono state la forza del progetto. Senza questo, riteniamo che nulla sarebbe cambiato in modo sostanziale. Sicuramente il solo studio personale, non avrebbe favorire un cambiamento efficace e tangibile come quello che è avvenuto in gruppo e con l’aiuto di un esperto capace di motivare e sorreggere: «Devo praticamente tutto alle lezione seguite e al confronto. Ben venga questa esperienza, anzi fosse capitata prima!»; «Mi ha arricchito il confronto con il gruppo sulle attività da proporre e i possibili approcci da seguire. Sarebbe bello però farlo senza la pressione della sperimentazioni, avendo solo la possibilità di seguire corsi di formazione sulla disciplina e sulla didattica della disciplina».
L’unico rammarico che proviamo come gruppo è che l’esperienza vissuta non si riesca a raccontarla tramite programmazioni, forse per carenze nostre, forse per mancanza di abitudine a questo, o forse perché è davvero difficile presentare agli altri il perché delle scelte, il senso e la profondità delle proposte.

Il cambiamento più forte a nostro parere è stato su noi stessi, sul modo di porsi nei confronti della disciplina, sul modo di essere in classe. Di conseguenza, questa evoluzione ha avuto ricaduta sul modo di insegnare, sul coinvolgimento dei ragazzi, sul loro interesse e il loro apprendimento: «Se la matematica non fosse diventata, prima di tutto per me, un linguaggio e uno strumento di studio, non avrei mai potuto trasmetterlo ai ragazzi».
Con gradi diversi di cambiamento in noi e nella trasposizione didattica, alcuni sono riusciti ad ottenere notevoli risultati in classe: «Credo proprio di essere riuscita ad appassionare i miei allievi»; «Vedere l’entusiasmo degli allievi mi ha dato forza. Ci siamo veramente divertiti molto»; «I miei allievi sono via via migliorati: merito dell’attività pratica proposta appena entrata in aula il primo giorno di scuola, merito dei solidi costruiti subito dopo, merito dello sporco in aula alla fine di alcune attività (pulire dopo il lavoro è diventato motivo di vanto, non certo di vergogna). I ragazzi hanno sempre accolto con entusiasmo le attività, proposte sempre a sorpresa. Non ho mai visto i miei ragazzi sbuffare e arrabbiarsi, nessuno ha mai avuto paura di sbagliare; a volte sembrava potesse esserci caos in aula, ma chi era presente, capiva bene che era l’entusiasmo di poter parlare, di intervenire sulla matematica! Credo, infine, che buona parte dei ragazzi abbia appreso bene, tutti comunque si sono impegnati, tutti hanno capito che chiunque può tentare di fare matematica, da solo o, se serve, con un amico vicino. Penso di essere stata proprio fortunata!».

14. Il punto di vista degli allievi
Una insegnante a fine sperimentazione racconta:
«L’ultimo giorno di lezione, prima dello stage che li impegnava per parte di marzo e tutto aprile, dopo aver svolto un test matematico, tutti gli allievi mi hanno scritto che cosa pensavano della matematica svolta, su dei foglietti: quel giorno avevamo studiato per la prima volta in giardino, come al solito si stava bene. A

casa, mi sono ritrovata pensieri semplici, quasi tutti anonimi… Il più bel regalo che potessi ricevere, la retribuzione più gratificante, l'offerta più disinteressata e ingenua che potessero fare a me e indirettamente a chi mi ha aiutata in questo percorso. Serberò questi pensieri per sempre.
Non erano questi forse i ragazzi freddi, poco disponibili ad aprirsi, poco fiduciosi di cui avevo parlato a inizio anno?
Ricordo il primo giorno di scuola: tutti, a parte uno, mi dissero che in matematica erano sempre andati malissimo, risposi che non sarebbe importato, perché in sperimentazione saremmo partiti tutti allo stesso livello, perché avremmo lavorato in modo diverso. Anzi, aggiunsi, che era meglio svuotare la mente ed essere disponibili ad un modo diverso di fare le cose. Tutti, questa volta proprio tutti, mi dissero che odiavano geometria, e poi senza nemmeno accorgersene ne hanno fatta tantissima…
I semplici pensieri dei miei ragazzi sono i seguenti:

"In quest'anno la matematica mi è piaciuta molto: è stata molto facile anche perché mentre la prof spiegava, lavorando insieme, scherzavamo anche con lei. La prof è molto brava e strana a spiegare, è anche molto gentile con tutti e poi AIUTA TUTTI.
Secondo me, la prof mi aiuta molto di più degli altri. Con la prof io sono sempre sereno anzi CONTENTO e grazie a lei ed al suo modo, ho capito delle cose di matematica, perché prima non sapevo proprio NIENTE".

"La materia matematica dall'inizio dell'anno mi è subito piaciuta, sia il modo di spiegare e di fare, che gli aiuti da parte della prof.
In sintesi il + bell'anno di matematica ke abbia mai fatto!!!".

"La matematica di quest'anno mi è molto piaciuta e mi sono divertito un TOT. Senza mai studiare ho imparato più cose degli anni scorsi che studiavo tutti i giorni".

"Il mio giudizio sulla matematica di quest'anno è molto positivo! Mi piace soprattutto il modo in cui ci viene proposta e spiegata, senza l'ansia che di solito accompagna questa materia. Io ho quasi 18 anni, era ora che ci venisse spiegata matematica in modo simpatico, ma efficace".

"La matematica che abbiamo fatto è stata molto migliore e molto più bella di tutti gli anni che ho fatto matematica".

"La matematica di quest'anno è stata sicuramente più diversa degli altri anni e mi sono trovato benissimo anche perché la prof è indegna!".

"La matematica di quest'anno mi è piaciuta perché sapevo già tutto e non avevo problemi a farla. Il bello però è che ho sempre seguito anche con tre ore attaccate, perché non è mai stata noiosa perché la prof che abbiamo la rendeva piacevole."

"La matematica che abbiamo fatto quest'anno è stata abbastanza semplice, perché la prof spiegava e facevamo le cose molto bene e spero che la prof ci sarà anche l'anno prossimo. La matematica fatta insieme ha avuto delle lezioni che mi sono piaciute molto, anche se io ho solo due sufficienze, quasi."

"Sicuramente è stata la matematica migliore…"

"Quest'anno la matematica mi è piaciuta di più, perché sembrava facile e gentile."

“Quest’anno ho fatto fatica rispetto l’anno scorso. È più difficile”

Come insegnante ho ancora tanto da imparare e, il peggio, è che non so quanto. Spero però di aver fatto un lavoro almeno discreto, non tanto per me, ma per chi mi ascoltava convinto, dimostrando di avere un gran bisogno di me.
Non posso a questo punto non ringraziare i miei ragazzi:
Paolo, Vittorio, Michele, Fabio, Michael, Giovanni, Salvatore, Aristide, Carlo, Vittorio, Matthias, Francesco
e Silvia, per tutto ciò che ci ha dato» (la voce di un’insegnante).

Dai pareri spontanei degli allievi emerge l’importanza dell’aspetto affettivo che accompagna ogni tipo di apprendimento, della motivazione e volizione, del bisogno di maggiore autostima e di sentirsi capiti dagli altri. I giudizi sulla sperimentazione della quasi totalità degli studenti di ogni classe sono stati molto positivi (sono veramente pochi, al massimo uno o due per classe, coloro che rimpiangono il vecchio stile di insegnamento), anche se c’è sempre chi continua a fare fatica, chi continua ad avere difficoltà, ma questo non modifica il giudizio positivo nei confronti dell’esperienza vissuta. Certo, un anno di lavoro insieme non può cambiare totalmente l’ottica dei ragazzi, ma può certamente essere un primo tassello di un lungo percorso verso un apprendimento solido di questa disciplina.

Anche i commenti ottenuti dagli allievi delle altre classi della sperimentazione rispecchiano più o meno le tipologie della testimonianza precedente, spesso con un linguaggio diverso, meno colloquiale e sintetico, ma con la stessa sostanza di contenuti.
Si riscontrano, nella grande maggioranza dei casi, giudizi molto positivi sulla sperimentazione:

«Penso che la matematica è una materia che serve alla vita; a me piace studiare la matematica, mi piace il corso anche la prof perché insegna bene».

«Penso che quest’anno nel corso della matematica sia stato molto bello perché a differenza delle altre scuole, in questa scuola la matematica la si impara giocando e penso che sia molto interessante imparando la matematica in questo modo, perché per chi ha delle difficoltà in questo modo la impara meglio!».

«Secondo me quest’anno le lezioni di matematica sono state più semplici e soprattutto più divertenti rispetto a quando andavo alle superiori. Sono cose più semplici ma se non si studia non si riesce a fare nemmeno quelle. La matematica non mi è mai piaciuta ma purtroppo nella vita serve molto e quindi bisogna studiarla. Di sicuro con questo nuovo metodo di svolgere le lezioni è più “bello” capire la matematica e a mio parere anche l’anno prossimo non sarebbe male continuare così».

«Mi è piaciuto molto perchè per me era una cosa nuova».

«Mi è piaciuto molto e sono soddisfatta. È stata molto interessante e con questi metodi ho imparato meglio la matematica”.

Frasi che mettono in evidenza difficoltà personali degli allievi come:

«Per me il corso è andato abbastanza bene, già il capirci qualcosa per me è stato un traguardo, gli anni scorsi non ci capivo nulla, mentre quest'anno spero di prendere la sufficienza … ma comunque sia almeno sono riuscita a capirci qualcosa!».

«Il percorso di matematica è stato interessante ma faticoso!».

Sporadici giudizi non del tutto positivi del bilancio del corso:

«Per me il corso di matematica è andato abbastanza bene anche se ho fatto un po' fatica a capire come facevo gli altri anni forse non mi sono impegnato al massimo».

«Il corso di matematica che ho frequentato quest'anno è stato un po' strano: come la prof. Non abbiamo seguito uno schema rigido preso da un libro ma siamo andati avanti a sensazione, con l'utilizzo di esercizi strani studiati ed ideati dalla prof nelle sue notti insonni. Tutto sommato però posso dire che è stata l'unica prof che mi ha fatto odiare un po' meno la matematica, rendendola più piacevole e più leggera».

Crediamo che queste testimonianze siano sufficienti per far intuire il punto di vista degli allievi, che ci danno quotidianamente lo stimolo per metterci in gioco e per ripensare criticamente alla nostra professione.

15. Un esempio di attività

Come gruppo di docenti di matematica abbiamo scelto di presentare una classica attività che riguarda un argomento di base della geometria, non lontana da una programmazione usuale. Crediamo infatti che sia più utile per il lettore ritrovarsi in un tema che propone sicuramente in classe, presentato in modo da porre l'attenzione sul ruolo attivo che dovrebbe avere l'allievo nel processo di insegnamento-apprendimento. Questa attività vuole rappresentare solo un esempio, senza nessuna pretesa di originalità e perfezione, dato che siamo consapevoli che le scelte per ogni argomento potrebbero essere molteplici e altrettanto valide. Se poi il lettore ne sentirà l'esigenza, potrà rintracciare nelle nostre programmazione proposte di attività più creative, innovative e coraggiose che abbiamo pensato, progettato e sperimentato con i nostri allievi.

Area di base: Scientifico matematica

Codice modulo (2 MS) - Titolo modulo: Laboratorio delle forme

Titolo attività: Parallelismo e incidenza di rette

Obiettivi:

<u>Indicatore 1</u>: distinguere gli enti fondamentali della geometria e utilizzare la terminologia ed il simbolismo relativi.

Indicatore 2: stabilire le reciproche posizioni tra rette complanari.

Indicatore 3: tracciare rette parallele e rette perpendicolari a rette assegnate, passanti per un punto assegnato.

Contenuti:
Parallelismo e incidenza di rette: il concetto di distanza.

Selezione e organizzazione dei metodi:
Tecniche prescelte: simulazione, scoperta, validazione, socializzazione e istituzionalizzazione da parte del docente dei sapere scoperti personalmente dagli allievi.

Fasi di lavoro:

- Far sedere i ragazzi in terra in cerchio.
- Mettere al centro un bristol e disegnarci due punti; prendere poi delle corde e chiedere ai ragazzi di considerarle come linee illimitate.
- Chiamare un ragazzo perché disponga una corda sul cartellone come vuole l'unico vincolo è che entrambi i punti appartengano alla corda. Chiedere poi ad altri ragazzi di fare lo stesso con le altre corde. Chiedere di osservare e descrivere la disposizione delle corde prima liberamente e poi di analizzare quante rette hanno individuato (1 perché per due punti passa una e una sola retta, le altre sono linee curve, a meno che non si considerino rette coincidenti). Chiedere se ricordano un po' di nomenclatura e di usarla per descrivere ciò che osservano (punti, linee, rette, segmenti, …). Chiedere di spiegare il concetto di segmento che sarà poi istituzionalizzato dall'insegnante.
- Introdurre il concetto di distanza come la misura del percorso minimo individuato dal segmento che unisce i due punti (concetto che sarà ripreso in seguito: distanza tra un punto e una retta; altezza nelle figure concepita come distanza; …).
- Lasciare sul cartoncino solo la corda che rappresenta la retta che passa per i due punti e disegnare un terzo punto non appartenente alla retta. Chiedere ad un ragazzo di prendere una corda e di disporla in modo che rappresenti una retta che passa per quest'ultimo punto e che abbia sempre la stessa distanza rispetto alla retta precedente. Come si chiama la disposizione delle rette l'una rispetto all'altra? Come possiamo definire allora due rette parallele? Data una retta e un punto esterno ad essa quante rette parallele a quella data passano per il punto?
- Che cosa vuol dire incidenti? Chi è in grado di disporre le due rette in modo che siano incidenti? Anche in questo caso i tre punti devono appartenere alle due rette. Quando due rette sono incidenti? Data una retta e un punto esterno ad essa quante rette incidenti a quella data passano per il punto? Chiediamo inoltre di disporre le due rette in modo che i tre punti appartengano alle rette e che uno sia il punto di incidenza. Quante soluzioni possiamo avere per ogni punto di incidenza?

- Chiedere di disporsi a coppie e di inventare situazioni problematiche su questo tema da porsi l'un l'altro.
- Se gli allievi lo richiedono possono riprodurre l'attività nel quaderno tramite disegno o in piccole dimensioni con spaghi o penne.
- Far scrivere sul quaderno le scoperte più significative dell'esperienza e che cosa sono per loro rette parallele e incidenti e poi discutere tutti insieme le varie scelte. Validare e socializzare la o le definizioni trovate fino ad arrivare ad un accordo condiviso.
- Potrebbe essere accattivante a questo punto far vedere ai ragazzi alcune illusioni ottiche relative alle rette parallele (rette che non sembrano parallele e invece lo sono e viceversa) per far comprendere loro come l'occhio da solo può essere un mezzo poco attendibile. Conoscere gli elementi di base della geometria ci permette di avere chiavi di lettura comuni, per rileggere e comunicare la realtà e per lavorare con gli "occhi della mente". Verificare se quello che vediamo coincide con la realtà (l'occhio potrebbe ingannarci, vedi allegato alla fine dell'attività).
- Ritornare alle rette parallele e disporle in modo che la loro distanza sia zero. Come potrebbero chiamarsi queste due rette? Sono rette coincidenti, un caso particolare di rette parallele (se le rette parallele sono state definite come equidistanti); le rette coincidenti sono infatti rette che mantengono tra loro sempre la stessa distanza: zero.
- Riposizionare le rette in modo che siano incidenti e cercare un caso particolare di rette incidenti: le rette perpendicolari che incidendo creano angoli della stessa ampiezza. Fare considerazioni per scoprire se le rette incidenti possono essere considerate casi particolari di perpendicolari o se vale il viceversa.
- Istituzionalizzare da parte del docente il concetto che le rette coincidenti possono essere considerate casi particolari di rette parallele (dipende dalla definizione scelta) e che le rette perpendicolari possono essere considerate casi particolari di rette incidenti, ma non è vero il viceversa: le parallele non sono di solito coincidenti e le incidenti non sono di solito perpendicolari.

[Volendo si può completare il discorso ampliandolo allo spazio:

- Prendere due asticciole considerate come rette (immaginate illimitate) nello spazio e disporle in modo da essere parallele e successivamente incidenti. In entrambi i casi si nota che le rette hanno un piano in comune, sono complanari. Con un cartoncino si può evidenziare il piano che contiene le due rette.
- Chiedere agli studenti di trovare posizioni di rette nello spazio che non sono né incidenti, né parallele; si troveranno così due rette sghembe che non hanno piani in comune; va cercata questa posizione disponendo le asticciole nello spazio.
- Facciamo costruire ai ragazzi un parallelepipedo "scheletrato" con stuzzicadenti (spigoli) e pongo (vertici) che rappresenta l'aula per poi

cercare le coppie di spigoli tra loro paralleli, perpendicolari e sghembi].

- creare in gruppo una scheda di riepilogo con tutte le scoperte avvenute durante la lezione.

Ambiente di lavoro: aula

Strumenti e materiali: corde, 1 bristol, un pennarello, forbici, scheda preparata dal docente, 2 pezzi di cartone, quaderno, penne.
Eventualmente: stuzzicadenti e pongo.

Raggruppamento degli allievi e loro ruolo: si lavorerà con il gruppo-classe. Inizialmente gli allievi parteciperanno attivamente alla lezione, costruiranno un personale sapere, lo valideranno, socializzeranno con gli altri, infine sarà istituzionalizzato dall'insegnante.

Ruolo del docente: durante l'attività il docente sarà sia informatore (quando trasmetterà agli allievi i contenuti previsti dall'attività) che facilitatore, guida e regista dell'attività cognitiva (quando aiuterà gli allievi ad arrivare da soli ai saperi previsti dall'attività).

Ore previste: 2 (eventualmente 3 se si tratta anche lo spazio).

Verifica formativa di fine attività
La verifica relativa al raggiungimento degli obiettivi che sono stati definiti verrà effettuata attraverso il disegno della piantina di un paese. Il lavoro sarà individuale.
Ogni ragazzo avrà un foglio A3 su cui dovrà disegnare seguendo le indicazioni che gli verranno assegnate. Ogni paese sarà costituito da un numero *n* di vie che sono disposte secondo la planimetria tipicamente romana, cioè parallele o perpendicolari le une alle altre (si cercherà una vecchia planimetria da far vedere ai ragazzi). Le indicazioni che si troveranno sono, ad esempio: via Verdi è perpendicolare a via Giotto, la quale a sua volta è parallela a Via Vivaldi. Da via Manzoni partono due perpendicolari, via Margherita e via Viola che arrivano entrambe sulla piazza circolare chiamata "Piazza Rotonda". Via Manzoni, via Margherita e Via Viola sono poi attraversate dal fiume "Son"; ecc.

Il tempo previsto per questa verifica è di 1/2 ora.

Attività di recupero (o consolidamento)

Tecniche prescelte: gioco a squadre

Fasi di lavoro:
- Ogni membro della squadra inventa una figura.

- Il gioco ha come scopo quello di riuscire a capire e disegnare in modo corretto quante più figure possibili della squadra avversaria.
- Giocano due ragazzi per volta (uno di una squadra, uno dell'altra) che andranno al centro dell'aula e si metteranno schiena contro schiena.
- A turno devono riuscire a disegnare la figura dell'avversario, basata sui concetti di parallelismo e incidenza, seguendo le sue indicazioni (es.: la mia figura è costituita da quattro segmenti: due paralleli tra loro, uno perpendicolare ad entrambi i due precedenti e con gli estremi in comune e uno incidente, ma non perpendicolare, ad entrambi i primi due segmenti e sempre con gli estremi in comune. Troveranno così il trapezio rettangolo se i ragazzi hanno gia fatto la lezione sui poligoni).
- Vince la squadra che individua più figure.
- A conclusione di ogni figura si possono fare considerazioni sulle varie ambiguità linguistiche o concettuali che possono essere emerse.

Ambiente di lavoro: aula

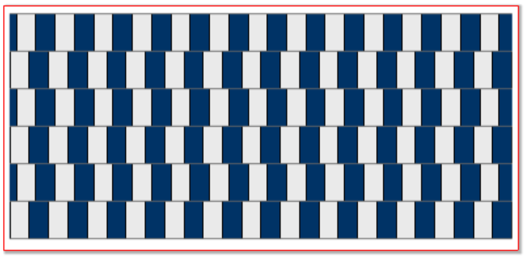
Strumenti e materiali: fogli

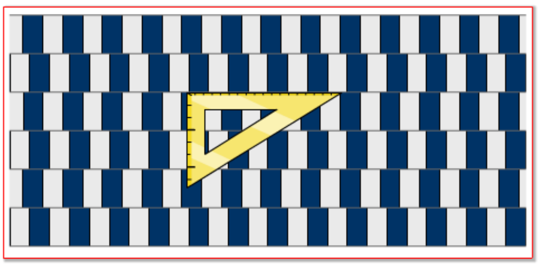
Raggruppamento degli allievi e loro ruolo: due gruppi

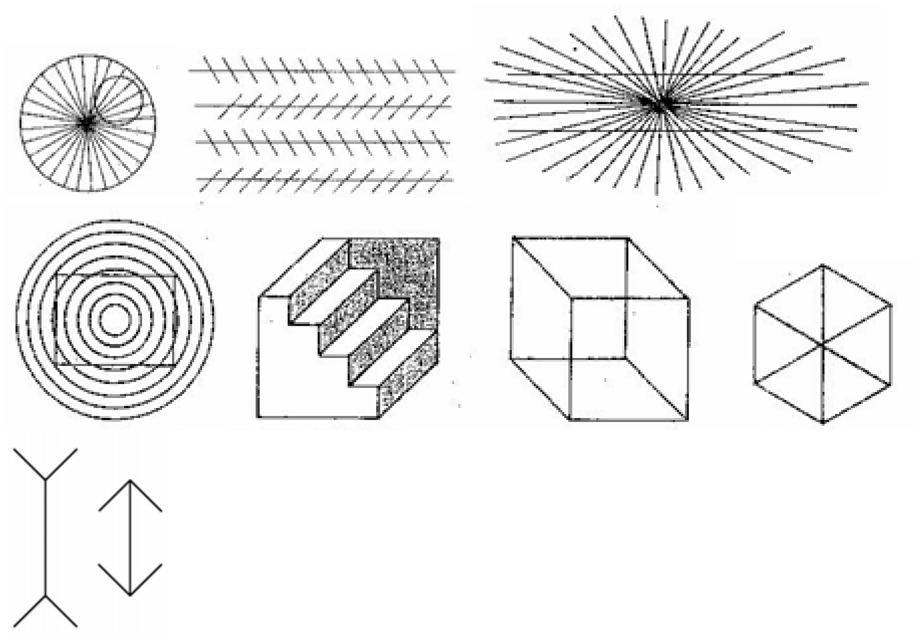
Ruolo del docente: osservatore

ore previste: 2

Allegato:
Immagini illusioni ottiche







Bibliografia

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

Arzarello F., Robutti O. (2002). *Matematica.* Brescia: La Scuola.

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Borasi R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors.* Norwood, NJ: Ablex.

Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In: Wanhamme W., Wanhamme J. (eds.) (1976). *La problématique et l'enseignement des mathématiques*. Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976. [Ripubblicato su: *Recherches en didactique des mathématiques*. 4, 2, 1983, 165-198].

Caldelli M. L., D'Amore B. (1986). *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*. Firenze: La Nuova Italia.

Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

Chevallard Y., Joshua M.A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en didactique des mathématiques.* 3 (1), 159-239.

D'Amore B. (1987). *Una mostra di matematica*. Firenze-Teramo: Giunti & Lisciani.

D'Amore B. (1988). Il laboratorio di Matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo. *L'educazione matematica*. 3, 41-51.

D'Amore B. (1990-91). Imparare in laboratorio. *Riforma della scuola*; in 4 parti; I: *Imparare in* laboratorio, 11, 1990, 42-43; II: *Numeri e teoremi in camice bianco*, 1/2, 1991, 51-53; III: *Fare per saper pensare*, 5, 1991, 37-40; IV: *Filosofia e linguaggi del* *laboratorio*, 9, 1991, 36-38. [Questo articolo è stato ristampato per intero in appendice a: D'Amore B., Picotti M. (1991). *Insegnare matematica negli anni novanta nella scuola media inferiore*. Milano: Bruno Mondadori].

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2000). La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. 4, 35-40.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2007). Lo zero, da ostacolo epistemologico ad ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica*. 4, 425-454.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México. 14, 1, 48-61.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *Difficoltà nell'apprendimento della matematica. Il punto di vista della didattica.* Trento: Erickson.

D'Amore B., Marazzani I. (ed.) (2005). *Laboratorio di matematica nella scuola primaria. Attività per creare competenze*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

da Ponte J.P., Berger P., Cannizzaro L., Contreras L.C., Safuanov I. (1999). Research on teachers' beliefs: empirical work and methodological challenges. In: Krainer K., Goffree F., Berger P. (eds.). *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. CERME-1, Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück. 3, 79-97.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5, 37-65.

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Glaeser G. (1981). Épistémologie des nombres rélatifs. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 2, 3, 303-346.

Iori M. (2007-2008). Epistemologia dell'insegnante di matematica sulla sua conoscenza professionale. La matematica e la sua didattica. Parte I, 2007, 21, 2, 197-220; Parte II, 2007, 21, 3, 303-326; Parte III, 2007, 21, 4, 501-523; Parte IV, 2008, 22, 1, in corso di stampa.

Llinares S. (1999). Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas: características de una agenda de investigación. *Zetetike*. 12, 7, 9-36.

Llinares S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. In: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?*. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P. 195-210.

Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica.* Napoli: Tecnodid.

Moreno Armella L. (1999). Epistemologia ed educazione matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 43-59.

Pehkonen E. (1995). What are the key factors for mathematics teachers to change? In: Meira L., Carraher D. (eds.). *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*. Recife, Brazil: University of Pernambuco. 2, 178-185.

Perrin-Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds.). (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage. 97-147.

Popper K. (1972). *Objective Knowledge an Evolutionary Approach.* Oxford: Clarendon Press. [tr. it. *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evoluzionistico.* Roma: Armando, 2002].

Sbaragli S. (2005a). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71.

Sbaragli S. (2005b). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 50, 69-76.

Sbaragli S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* 5, 2, 49-76.

Schoenfeld A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: Grows A.D. (Ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. New York: MacMillan. 334-370.

Tirosh D., Graeber A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practice. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 643-687.

Wilson M., Cooney T.J. (2002). Mathematics teacher change and development. The role of beliefs. In: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (eds.). (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?*. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P. 127-148.

Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Sprinter-Verlag Italia.